补充材料：定理证明

定理3证明如下：

我们先来证明同步更新的情况。给定无向含权网络$G(V,E,W)$，由含权的$\mathcal{H}^w$函数的定义出发，任给节点$i\in V$和整数$n\ge 0$,都有$h_i^{w(n)}\ge 0$且$h_i^{w(0)}\ge h_i^{w(1)}$成立。

当$n=0$时，$s_i=h_i^{w(0)}\ge h_i^{w(1)}$成立；假设当$n\le m$时，$h_i^{w(n)}\ge h_i^{w(n+1)}$成立，则当$n=m+1$时，由含权的$\mathcal{H}^w$函数的定义有

$$h_i^{w(m+2)}=\mathcal{H}^w[(w_{ij_1},h_{j_1}^{w(m+1)}),(w_{ij_2},h_{j_2}^{w(m+1)}),\ldots,(w_{ij_{k_i}},h_{j_{k_i}}^{w(m+1)})]$$

而根据含权$\mathcal{H}^w$函数又有

$$\begin{aligned}h_i^{w(m+1)}&=\mathcal{H}^w[(w_{ij_1},h_{j_1}^{w(m)}),(w_{ij_2},h_{j_2}^{w(m)}),\ldots,(w_{ij_{k_i}},h_{j_{k_i}}^{w(m)})]\\&\ge\mathcal{H}^w[(w_{ij_1},h_{j_1}^{w(m+1)}),(w_{ij_2},h_{j_2}^{w(m+1)}),\ldots,(w_{ij_{k_i}},h_{j_{k_i}}^{w(m+1)})]=h_i^{w(m+2)}\end{aligned}$$

即，

$$h_i^{w(m+1)}\ge h_i^{w(m+2)}\qquad (a)$$

由此可知，序列$h_i^{w(0)},h_i^{w(1)},h_i^{w(2)},\ldots$单调不增，且都不小于0，因此该序列必存在一个不小于0的极限。不妨记$h_i^{w(\infty)}$为其极限。

接下来引入两个关系式。首先设$G'(V',E',W')\subseteq G(V,E,W)$,由$\mathcal{H}^w$函数定义，显然有：对于任意节点i和整数$n\ge 0$，都有 $h_{i,G'}^{w(n)}\le h_{i,G}^{w(n)}$，其中下标$G'$强调是定义在图$G'$上的。又记$s_{min}$为图$G$中节点的最小强度，则对于任意节点$i$和任意整数$n\ge 0$,总存在

$$h_i^{w(n)}\ge s_{min}\qquad (b)$$

(b)式证明如下：

任给节点$i\in V$，当$n=0$时，$h_i^{w(0)}=s_i\ge s_{min}$成立；设当$n\le m$时，$h_i^{w(n)}\ge s_{min}$成立；则当$n=m+1$时，由含权$\mathcal{H}^w$函数的定义有

$$h_i^{w(m+1)}=\mathcal{H}^w[(w_{ij_1},h_{j_1}^{w(m)}),(w_{ij_2},h_{j_2}^{w(m)}),\ldots,(w_{ij_{k_i}},h_{j_{k_i}}^{w(m)})]$$

由于以上假设对于任意节点j也成立，即$h_{j_1}^{w(m)}\ge s_{min},h_{j_2}^{w(m)}\ge s_{min},\ldots,h_{j_{k_i}}^{w(m)}\ge s_{min}$，也就是说$\mathcal{H}^w$函数中的所有$h_j^{w(m)}$值都不小于$s_{min}$，且$\mathcal{H}^w$函数中的元素个数

$$\sum_{j=1}^{k_i}w_{ij}=s_i\ge s_{min}$$

所以由$\mathcal{H}^w$定义可知$h_i^{w(m+1)}\ge s_{min}$，(b)式得证。

G中节点i的含权核数记为c_i^w。设G'为G图的含权c_i^w-核,显然$G'\subseteq G$。且在G'中，$s'_{\min}\ge c_i^w$ （$s'_{\min}$为G'中的最小强度），结合上面公式(b)及含权$\mathcal{H}^w$函数定义知：

$$h_i^{w(\infty)}\ge s_{min}\ge c_i^w\qquad (c)$$

另记$G''(V'',E'',W'')$为所有在G中满足$h_j^{w(\infty)}\ge h_i^{w(\infty)}$条件的节点组成的子图，注意到节点$i$自身也满足该条件。对于$G$中任意节点$l$，有$h_l^{w(\infty)}=\mathcal{H}^w[(w_{lj_1},h_{j_1}^{w(\infty)}),(w_{lj_2},h_{j_2}^{w(\infty)}),\ldots,(w_{lj_{k_l}},h_{j_{k_l}}^{w(\infty)})]$因此，对于任意节点$j\in V''$,既然在$G$上满足$h_j^{w(\infty)}\ge h_i^{w(\infty)}$即是说节点$j$最少有$h_i^{w(\infty)}$个邻居，且这些邻居的$h^{w(\infty)}$值都不小于$h_i^{w(\infty)}$，这也就是说这些$j$节点的邻居节点也都满足$G''$的定义，由此可知，$G''$中所有节点的$h^{w(\infty)}$值都不小于$h_i^{w(\infty)}$，换句话说，$G''$是$G$的一个含权$h_i^{w(\infty)}$-核。由于$c_i^w$为节点$i$的含权$k$-壳值，所以，

$$c_i^w \geq h_i^{w(\infty)} \qquad (d)$$

综合公式(c)(d)，根据夹逼定理得序列 $h_i^{w(0)}, h_i^{w(1)}, h_i^{w(2)}, \ldots$ 的极限为 c_i^w。同步更新情况下，定理证毕。

接下来，我们继续证明异步更新的情况。

为了方便证明，我们引进系统时间步指标 t。初始 $t=0$ 的时候，给定无向含权网络 $G(V,E,W)$ 对任意节点 $j \in V$ ，定义 $g_j^{w(0)} = s_j$。以后每一个时间步，任意选择一个节点用 $\mathcal{H}^w$ 算子进行操作。如在 t 时刻选择了 i 节点，则有 $g_i^{w(t)} = \mathcal{H}^w(g_{j_1}^w, g_{j_2}^w, \cdots, g_{j_{k_i}}^w)$ 。省略时间上标的项指最近更新的项（具有最大的时间指标的项，显然，括号中每一个被省略的上标都严格小于 t），在实际计算中，只需要保留最近的更新。注意，对于任意给定的二元组 (t, j)， $g_j^{w(t)}$ 不一定存在，除非节点 j 在时间步 t 正好更新了一次。

对于任意节点 $j \in V$，如果该节点在 t_1 和 t_2 两个时刻进行了更新，且 $t_2 > t_1 \geq 0$，则有 $g_j^{w(t_1)} \geq g_j^{w(t_2)}$。显然，在 $t=1$ 时刻，不论是何节点 j 被选中更新，都有 $g_j^{w(0)} \geq g_j^{w(1)}$。利用数学归纳法，假设在 $t \leq n$ 的情况下上述关系成立，下面证明在 $t = n+1$ 的时候成立。记 $n+1$ 时刻被选中更新的节点为 i，而其任意一次更早更新的时间步为 $t'(0 \leq t' \leq n)$。两次更新不妨记为： $g_i^{w(t')} = \mathcal{H}^w(g_{j_1}^{w(\phi_1)}, g_{j_2}^{w(\phi_2)}, \cdots, g_{j_{k_i}}^{w(\phi_{k_i})})$ 和 $g_i^{w(t)} = \mathcal{H}^w(g_{j_1}^{w(\varphi_1)}, g_{j_2}^{w(\varphi_2)}, \cdots, g_{j_{k_i}}^{w(\varphi_{k_i})})$。显然，对于任意 $1 \leq m \leq k_i$，都有 $\phi_m \leq \varphi_m \leq n$。由归纳假设可知 $g_{j_m}^{w(\phi_m)} \geq g_{j_m}^{w(\varphi_m)}$，再由 $\mathcal{H}^w$ 函数定义可知 $g_i^{w(t')} \geq g_i^{w(t)}$。对于任意节点 $i \in V$，记其更新的时间步依次为 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$，则序列 $g_i^{w(t_0)}, g_i^{w(t_1)}, g_i^{w(t_2)}, \ldots$ 是一个单调不增函数，且都不小于0，因此有不小于0的极限，至此，可定义 $g_i^{w(\infty)}$ 为序列 $g_i^{w(t_0)}, g_i^{w(t_1)}, g_i^{w(t_2)}, \ldots$ 的极限值。

首先证明对任意 $j \in V$，有 $g_j^{w(\infty)} \geq c_j^w$。用反证法，若上式不成立，则记 i 为所有满足 $g_i^{w(\infty)} < c_i^w$ 的节点中最早更新到小于 c_i^w 值的节点，对应的更新时刻为 t，亦即 $g_i^{w(t)} < c_i^w$，且在此时刻前，对于所有的节点 $j \neq i$，都有 $g_j^w \geq c_j^w$（注意，时间上标忽略了，代表在 t 时间步前最后一次更新后的值），故

$$g_i^{w(t)} = \mathcal{H}^w(g_{j_1}^w, g_{j_2}^w, \cdots, g_{j_{k_i}}^w) \geq \mathcal{H}^w(c_{j_1}^w, c_{j_2}^w, \cdots, c_{j_{k_i}}^w)$$

由定理3同步更新证明过程可知， $\mathcal{H}^w(c_{j_1}^w, c_{j_2}^w, \cdots, c_{j_{k_i}}^w) = c_i^w$，即 $g_i^{w(t)} \geq c_i^w$，也就是

$$g_i^{w(\infty)} \geq c_i^w \qquad (e)$$

与假设矛盾，得证。

与定理3同步更新证明过程类似，收敛后，对于任意节点 $i \in V$，所有满足 $g_j^{w(\infty)} \geq g_i^{w(\infty)}$ 的节点（包括 i 本身）构成了一个 $g_i^{w(\infty)}$-核。由于 c_i^w 为节点 i 的含权核数，由含权核数定义知：

$$g_i^{w(\infty)} \leq c_i^w \qquad (f)$$

这是因为含权核数定义为所有核数大于等于 c_i^w 的节点构成 c_i^w-核，换句话说 c_i^w-核中节点的核数必须都不小于 c_i^w。

综合公式(e)(f)，根据夹逼定理得序列 $g_i^{w(t_0)}, g_i^{w(t_1)}, g_i^{w(t_2)}, \ldots$ 的极限为 c_i^w。

异步更新情况下，定理证毕。